BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

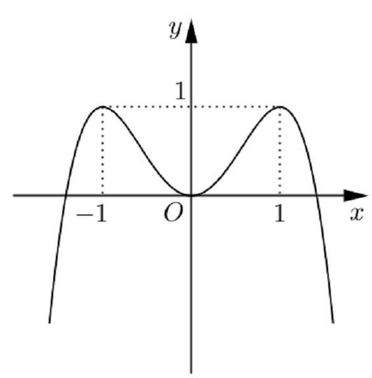
ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KỲ THI TRUNG HỌC PHỔ THÔNG QUỐC GIA NĂM 2016

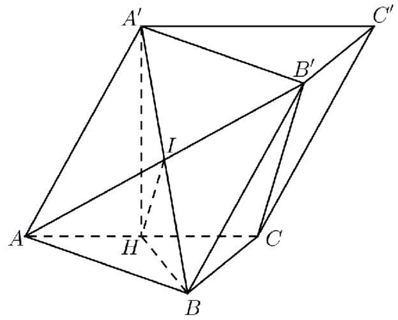
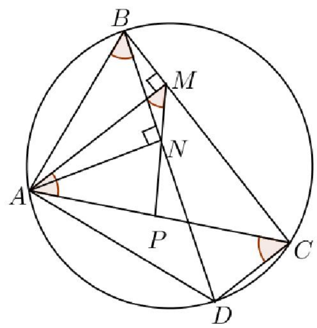
ĐÁP ÁN - THANG ĐIỂM

Môn thi: TOÁN

(*Đáp án - Thang điểm có* 04 *trang*)

Câu	Đáp án	Điểm
I **(*1,0 điểm*)**	**1. (*0,5 điểm*)**	
	Ta có $w = 2\left(1+2i\right)+1-2i$	0,25
	$= 3+2i.$ Vậy phần thực của w là 3 và phần ảo của w là 2.	0,25
	2. (*0,5 điểm*)	
	Ta có $A = 2\log_2 x - 3\log_2 x + \frac{1}{2}\log_2 x$	0,25
	$= -\frac{1}{2}\log_2 x = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$	0,25
II **(*1,0 điểm*)**	• Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. • Sự biến thiên: - Chiều biến thiên: $y' = -4x^3 + 4x$;	0,25
	$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{array}\right.$; $y' > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -1 \\ 0 < x < 1 \end{array}\right.$; $y' < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 < x < 0 \\ x > 1. \end{array}\right.$ Hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(-\infty;-1\right)$ và $\left(0;1\right)$. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $\left(-1;0\right)$ và $\left(1;+\infty\right)$. - Cực trị: hàm số đạt cực đại tại $x = \pm 1$, $y_{\text{CĐ}} = 1$; đạt cực tiểu tại $x = 0$, $y_{\text{CT}} = 0$. - Giới hạn: $\lim\limits_{x\to-\infty} y = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y = -\infty$.	0,25
	- Bảng biến thiên: $\begin{array}{c\|ccccccccc} x & -\infty & & -1 & & 0 & & 1 & & +\infty \\ \hline y' & & + & 0 & - & 0 & + & 0 & - & \\ \hline y & & & 1 & & & & 1 & & \\ & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & \\ & -\infty & & & & 0 & & & & -\infty \end{array}$	0,25
	• Đồ thị:  	0,25
III **(*1,0 điểm*)**	Hàm số đã cho xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$. Ta có $f'(x) = 3x^2 - 6x + m$.	0,25
	Hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $3x^2 - 6x + m = 0$ có hai nghiệm phân biệt, tức là $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m < 3$.	0,25

	Ta có $x_1^2+x_2^2=3\Leftrightarrow\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2=3\Leftrightarrow 4-2.\dfrac{m}{3}=3$	0,25
	$\Leftrightarrow m=\dfrac{3}{2}$ (thỏa mãn). Vậy $m=\dfrac{3}{2}$.	0,25
IV **(*1,0 điểm*)**	Ta có $I=\int\limits_0^3 3x^2\mathrm{d}x+\int\limits_0^3 3x\sqrt{x^2+16}\,\mathrm{d}x$.	0,25
	• $I_1=\int\limits_0^3 3x^2\mathrm{d}x=x^3\Big\|_0^3=27$.	0,25
	• $I_2=\int\limits_0^3 3x\sqrt{x^2+16}\,\mathrm{d}x$. Đặt $t=x^2+16,$ ta có $t'=2x;\ t(0)=16,\ t(3)=25$. Do đó $I_2=\int\limits_{16}^{25}\dfrac{3}{2}\sqrt{t}\,\mathrm{d}t$	0,25
	$=t\sqrt{t}\Big\|_{16}^{25}=61$. Vậy $I=I_1+I_2=88$.	0,25
V **(*1,0 điểm*)**	Ta có $\overrightarrow{BC}=\left(1;-1;2\right)$.	0,25
	Mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với BC có phương trình là $x-y+2z+3=0$.	0,25
	Đường thẳng BC có phương trình là $\begin{cases}x=1+t\\y=-t\\z=1+2t.\end{cases}$	0,25
	Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên BC. Ta có $H=(P)\cap BC$. - Vì $H\in BC$ nên $H\left(1+t;-t;1+2t\right)$. - Vì $H\in(P)$ nên $\left(1+t\right)-\left(-t\right)+2\left(1+2t\right)+3=0\Leftrightarrow t=-1$. Vậy $H\left(0;1;-1\right)$.	0,25
VI **(*1,0 điểm*)**	**1. (*0,5 điểm*)**	
	Ta có $2\sin^2 x+7\sin x-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=-4\\ \sin x=\dfrac{1}{2}.\end{array}\right.$	0,25
	• $\sin x=-4$: vô nghiệm. • $\sin x=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z})$.	0,25
	2. (*0,5 điểm*)	
	Không gian mẫu Ω có số phần tử là $n(\Omega)=\mathrm{A}_{10}^3=720$.	0,25
	Gọi E là biến cố: "B mở được cửa phòng học". Ta có $E=\left\{(0;1;9),(0;2;8),(0;3;7),(0;4;6),(1;2;7),(1;3;6),(1;4;5),(2;3;5)\right\}$. Do đó $n(E)=8$. Vậy $\mathrm{P}(E)=\dfrac{n(E)}{n(\Omega)}=\dfrac{1}{90}$.	0,25

VII **(*1,0 điểm*)**	 Gọi H là trung điểm của AC, ta có $A'H \perp (ABC) \Rightarrow \widehat{A'BH} = 45^{\circ}$.	0,25
	Ta có $BH = \dfrac{1}{2}AC = a$ và $S_{\Delta ABC} = a^2$. Tam giác $A'HB$ vuông cân tại H, suy ra $A'H = BH = a$. Do đó $V_{ABC.A'B'C'} = A'H.S_{\Delta ABC} = a^3$.	0,25
	Gọi I là giao điểm của $A'B$ và AB', ta có I là trung điểm của $A'B$ và AB'. Suy ra $HI \perp A'B$.	0,25
	Mặt khác HI là đường trung bình của $\Delta AB'C$ nên $HI // B'C$. Do đó $A'B \perp B'C$.	0,25
VIII **(*1,0 điểm*)**	 Phương trình *MN*: $x + y - 4 = 0$. Tọa độ P là nghiệm của hệ $\begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow P\left(\dfrac{5}{2}; \dfrac{3}{2}\right)$.	0,25
	Vì AM song song với DC và các điểm A, B, M, N cùng thuộc một đường tròn nên ta có $\widehat{PAM} = \widehat{PCD} = \widehat{ABD} = \widehat{AMP}$. Suy ra $PA = PM$.	0,25
	Vì $A \in AC : x - y - 1 = 0$ nên $A(a; a-1), a < 2$. Ta có $\left(a - \dfrac{5}{2}\right)^2 + \left(a - \dfrac{5}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{5}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{5}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a = 5 \end{array}\right. \Rightarrow A(0; -1)$.	0,25
	Đường thẳng BD đi qua N và vuông góc với AN nên có phương trình là $2x + 3y - 10 = 0$. Đường thẳng BC đi qua M và vuông góc với AM nên có phương trình là $y - 4 = 0$. Tọa độ B là nghiệm của hệ $\begin{cases} 2x + 3y - 10 = 0 \\ y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(-1; 4)$.	0,25
IX **(*1,0 điểm*)**	Điều kiện: $0 < x \leq 2$. Khi đó phương trình đã cho tương đương với $3\log_3^2\left(\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}\right) - 4\log_3\left(\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}\right).\log_3(3x) + \log_3^2(3x) = 0$ $\Leftrightarrow \left[\log_3\left(\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}\right) - \log_3(3x)\right]\left[3\log_3\left(\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}\right) - \log_3(3x)\right] = 0$.	0,25
	• $\log_3\left(\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}\right) - \log_3(3x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2+x} + \sqrt{2-x} = 3x$ $\Leftrightarrow 4 + 2\sqrt{4 - x^2} = 9x^2 \Leftrightarrow 2\sqrt{4 - x^2} = 9x^2 - 4$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \geq \dfrac{4}{9} \\ 81x^4 - 68x^2 = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow x^2 = \dfrac{68}{81}$. Kết hợp với điều kiện $0 < x \leq 2$, ta có nghiệm $x = \dfrac{2\sqrt{17}}{9}$.	0,25
	• $3\log_3\left(\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}\right) - \log_3(3x) = 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}\right)^3 = 3x \quad (1)$. Vì $0 < x \leq 2$ nên $3x \leq 6$.	0,25

<table>
<tr><td></td><td>Mặt khác $\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)^2=4+2\sqrt{4-x^2}\geq 4\Rightarrow\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)^3\geq 8$. Do đó phương trình (1) vô nghiệm.
Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=\dfrac{2\sqrt{17}}{9}$.</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td rowspan="6">X
(1,0 điểm)</td><td colspan="2">1. (0,25 điểm)</td></tr>
<tr><td>Điều kiện: $x\geq 2, y\geq -3$.
Ta có (*) $\Leftrightarrow\left(x+y+1\right)^2=4\left(x+y+1+2\sqrt{x-2}\sqrt{y+3}\right)$ (**).
Vì $2\sqrt{x-2}\sqrt{y+3}\leq x+y+1$ nên từ (**) suy ra $\left(x+y+1\right)^2\leq 8\left(x+y+1\right)$
$\Rightarrow x+y+1\leq 8\ \Rightarrow x+y\leq 7$.
Ta có $x=6, y=1$ thỏa mãn $(*)$ và $x+y=7$. Do đó giá trị lớn nhất của biểu thức $x+y$ bằng 7.</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. (0,75 điểm)</td></tr>
<tr><td>Vì $2\sqrt{x-2}\sqrt{y+3}\geq 0$ nên từ (**) suy ra $\left(x+y+1\right)^2\geq 4\left(x+y+1\right)$
$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+y+1\leq 0\\x+y+1\geq 4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+y+1=0\ (\text{vì } x+y+1\geq 0)\\x+y+1\geq 4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+y=-1\\x+y\geq 3.\end{array}\right.$</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>Vì $x^2\geq 2x$ (do $x\geq 2$), $y^2+1\geq 2y$ nên $x^2+y^2+1\geq 2\left(x+y\right)$. Do đó
$3^{x+y-4}+\left(x+y+1\right)2^{7-x-y}-3\left(x^2+y^2\right)\leq 3^{x+y-4}+\left(x+y+1\right)2^{7-x-y}-6\left(x+y\right)+3.$</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>Đặt $t=x+y$, ta có $t=-1$ hoặc $3\leq t\leq 7$.
Xét hàm số $f(t)=3^{t-4}+\left(t+1\right)2^{7-t}-6t+3$. Ta có $f(-1)=\dfrac{2188}{243}$;
$f'(t)=3^{t-4}\ln 3+2^{7-t}-\left(t+1\right)2^{7-t}\ln 2-6$;
$f''(t)=3^{t-4}\ln^2 3+\left[\left(t+1\right)\ln 2-2\right]2^{7-t}\ln 2>0, \forall t\in[3;7]$.
Suy ra $f'(t)$ đồng biến trên $(3;7)$. Mà $f'(t)$ liên tục trên $[3;7]$ và $f'(3)f'(7)<0$, do đó $f'(t)=0$ có nghiệm duy nhất $t_0\in(3;7)$.
Bảng biến thiên
<table>
<tr><td>t</td><td>3</td><td></td><td>t_0</td><td></td><td>7</td></tr>
<tr><td>$f'(t)$</td><td></td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td><td></td></tr>
<tr><td>$f(t)$</td><td>$\dfrac{148}{3}$</td><td>$\searrow$</td><td>$f(t_0)$</td><td>$\nearrow$</td><td>-4</td></tr>
</table>
Suy ra $3^{x+y-4}+\left(x+y+1\right)2^{7-x-y}-3\left(x^2+y^2\right)\leq\dfrac{148}{3}$ với mọi x,y thỏa mãn (*).
Đẳng thức xảy ra khi $x=2, y=1$.
Vậy $m\geq\dfrac{148}{3}$.</td><td>0,25</td></tr>
</table>

--------- Hết ---------